Álgebra Linear I
Espaço Vetorial

Prof. Joab dos Santos Silva[1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Sumário

Definição, Exemplos e Propriedades

Definição

Um conjunto não vazio V é um **espaço vetorial** sobre (um corpo) $\mathbb{K}$ se em seus elementos estiverem definidas as seguintes duas operações:

1) Adição: A cada par $u, v \in V$ corresponde um vetor $u+v \in V$, chamado de soma de u com v,ou seja,

$$\begin{array}{rcccc} + & : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & & (u, v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

(fechamento para adição vetorial) satisfazendo os axiomas:

A) $u+v=v+u,\ \forall\ u, v \in V$ (Axioma da Comutatividade)

B) $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall\ u, v, w \in V$ (Axioma da Associatividade)

C) Existe em V um vetor, denominado **vetor nulo** (vetor zero ou elemento neutro) e denotado por 0, tal que $u+0=u,\ \forall\ u \in V$.

D) A cada vetor $u \in V$ exista um vetor em V, denominado **oposto de** u (simétrico ou inverso aditivo) e denotado por $-u$, tal que $u+(-u)=0$.

2) Multiplicação por Escalar: A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, corresponde um vetor $\alpha u \in V$, denominado produto por escalar de α por u, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} \cdot \;: & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha, u) & \longmapsto & \alpha u \end{array}$$

(fechamento para multiplicação por escalar) satisfazendo os axiomas:

A) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall\ u \in V$.

B) $1u = u$, $\forall\ u \in V$ (onde 1 é denominado elemento identidade de $\mathbb{K}$)

3) Além disso, vamos impor que as operações dadas em 1 e 2 se distribuam, ou seja, que atendam aos seguintes axiomas:

A) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall\ u, v \in V$

B) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall\ u \in V$

Exemplo

Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

Exemplo

O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R}\}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar real assim definidas:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha(x_1, y_1) &= (\alpha x_1, \alpha y_1) \end{aligned}$$

Essas são as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

De fato, verifiquemos que este conjunto, com as operações assim definidas, satisfaz os axiomas de espaço vetorial.

1) a)

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = v + u \end{aligned}$$

$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^2$.

1) b)

$$\begin{aligned} u+(v+w) &= (x_1, y_1)+[(x_2, y_2)+(x_3, y_3)] \\ &= (x_1, y_1)+(x_2+x_3, y_2+y_3) \\ &= (x_1+(x_2+x_3), y_1+(y_2+y_3)) \\ &= ((x_1+x_2)+x_3, (y_1+y_2)+y_3) \\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2)+(x_3, y_3) \\ &= [(x_1, y_1)+(x_2, y_2)]+(x_3, y_3) \\ &= (u+v)+w \end{aligned}$$

$\forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

c) Seja $0=(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Com isso,

$$u+0=(x_1, y_1)+(0,0)=(x_1+0, y_1+0)=(x_1, y_1)=u$$

Logo, existe um vetor em $\mathbb{R}^2$, a saber o 0, tal que $u+0=u$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

D) Para cada $u \in \mathbb{R}^2$, seja $-u \in \mathbb{R}^2$ tal que $-u = (-x_1, -y_1)$, com isso

$$u + (-u) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0) = 0$$

Logo, existe um vetor $-u$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $u + (-u) = 0$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

2) A)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) \\ &= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1)) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = \alpha[\beta(x_1, y_1)] \\ &= \alpha(\beta u)\end{aligned}$$

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

B)

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1) = u$$

$\forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

3) a)

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) &= \alpha[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = \alpha(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (\alpha(x_1+x_2), \alpha(y_1+y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) \\ &= \alpha u + \alpha v \end{aligned}$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u, v \in \mathbb{R}^2$.

b)

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(x_1,y_1) = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) \\ &= \alpha(x_1,y_1) + \beta(x_1,y_1) \\ &= \alpha u + \beta u \end{aligned}$$

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo (Espaço das n-uplas)

De maneira mais geral à considerada acima, para cada $n \geq 1$, o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n\}$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ bastante natural com as operações: para cada $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ defina

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) \end{aligned}$$

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e defina as seguintes operações:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad \forall\ u, v \in V \\ \alpha u &= (\alpha x_1, 0) \quad , \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\ u \in V \end{aligned}$$

Verifique se V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com as operações assim definidas.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e defina as seguintes operações:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1) \quad , \quad \forall\ u, v \in V \\ \alpha u &= (\alpha x_1, \alpha y_1) \quad , \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\ u \in V \end{aligned}$$

Verifique se V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com as operações assim definidas.

Exemplo (Espaço das matrizes $m \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$)

O conjunto $V = M_{m \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações de adição matricial e a multiplicação matricial por escalar usuais.

Exemplo (Espaço dos polinômios P_n sobre o corpo $\mathbb{K}$)

O conjunto $V = P_n(\mathbb{K}) = \{p(x) \in P(\mathbb{K}) |\ \partial p \leq n\}$ dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ de grau menor ou igual a n, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações usuais.

Exemplo (Espaço nulo)

Seja V o conjunto formado por um único elemento, o qual denotaremos por 0 e $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário. Defina as seguintes operações:

$$0 + 0 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha 0 = 0, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$$

O conjunto $V = \{0\}$ com estas operações é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Este conjunto é denominado espaço nulo.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, da definição de espaço vetorial decorrem as seguintes propriedades.

Proposição (Unicidade do Vetor Nulo)

O vetor nulo de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é único.

Proposição (Unicidade do Vetor Oposto)

Para cada vetor $v \in V$, existe um único vetor $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.

Proposição

Para cada vetor $v \in V$, segue que $-(-v) = v$.

Proposição (Lei do Cancelamento da Adição)

Se $u, v, w \in V$ e $u + v = u + w$, então $v = w$.

Proposição

Se $u, v, w \in V$, então existe um único vetor $v \in V$ tal que $u + v = w$.

Proposição

Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha 0 = 0$.

Proposição

Para todo $v \in V$, $0v = 0$.

Proposição

Sejam $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$, *temos que* $\alpha v = 0$ *se, e somente se,* $\alpha = 0$ *ou* $v = 0$.

Proposição

Para todo $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$, *temos que* $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

1 , 2 , 3 e 4

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Subespaço Vetorial

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. O subconjunto W é um **subespaço vetorial** de V se W, restrito as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

O resultado a seguir estabelece as condições para que um subconjunto W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V seja um subespaço vetorial de V.

Teorema (da Caracterização de Subespaço)

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W \subset V$ um subconjunto não vazio. Então W é um subespaço se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Se $u, v \in W$, então $u + v \in W$.*
2. *Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in W$, então $\alpha v \in W$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Mostremos inicialmente que se W é um subespaço então satisfaz 1 e 2.

Se W é um subespaço de V, então W, restrito às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Logo, para cada $u, v \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $u + v \in W$ e $\alpha v \in W$. Estas são exatamente as propriedades 1 e 2 deste teorema.

($\Longleftarrow$) Mostremos agora que se valem 1 e 2, então W é um subespaço de V.

Suponha que valem as propriedades 1 e 2. Como estas são as operações 1 e 2 da definição de espaço vetorial restritas aos vetores de W, resta-nos mostrar que os axiomas de espaço vetorial são satisfeitos. Os axiomas $1a$, $1b$, $2a$, $2b$, $3a$ e $3b$ são automaticamente satisfeitos pelos vetores em W, pois eles são satisfeitos por todos os vetores em V. Portanto, para completar a prova precisamos apenas verificar os axiomas $1c$ e $1d$. $\square$

Demonstração (Cont.)

Seja v um vetor qualquer em W. Pela propriedade 2, que é nossa hipótese, $\alpha v \in W$ para cada escalar α. Tomando $\alpha = 0$, segue das propriedades de espaço vetorial que $0v = 0 \in W$. Tomando $\alpha = -1$, segue também pelas propriedades de espaço vetorial que $(-1)v = -v \in W$. $\square$

Corolário

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W \subset V$ um subconjunto não vazio. Então W é um subespaço se, e somente se, $u + \alpha v \in W$, para todo $u, v \in W$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

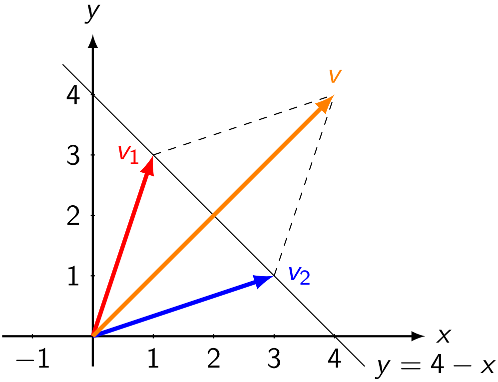
Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 2x\}$, isto é, W é o conjunto dos vetores do plano que tem a segunda componente igual ao dobro da primeira. Verifique se W é um subespaço de V.

Exemplo

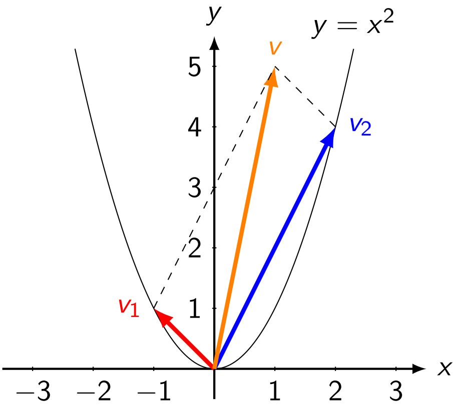
Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 4 - x\}$, isto é, W é o conjunto dos vetores do plano que tem a segunda componente igual 4 menos a primeira. Verifique se W é um subespaço de V.

O último exemplo sugere, para qualquer subconjunto W de um espaço vetorial V, que sempre que $0 \notin W$, W não é subespaço de V. Por muitas vezes usa-se esse fato para mostrar de maneira rápida que um subconjunto W não é subespaço de V. Entretanto, chamamos a atenção para o fato de que $0 \in W$ não implica em W é um subespaço, podemos ter $0 \in W$ sem que W seja subespaço.


y
x
4
3
2
1
−1
1
2
3
4
v
v_1
v_2
$y = 4 - x$

Exemplo (Função Quadrática)

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, isto é, W é o conjunto dos vetores do plano que tem a segunda componente igual ao quadrado da primeira. Verifique se W é um subespaço de V.



Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

5 , 6 , 7 e 8

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Operações com Subespaços

Considere os dois seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$,

$$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y=0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x-y=0\}$$

O conjunto $W_1 \cup W_2$ é da seguinte forma

$$W_1 \cup W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y=0 \ ou \ x-y=0\}$$

Temos que $u = (1,1) \in W_1 \cup W_2$ e $v = (1,-1) \in W_1 \cup W_2$. Agora, se $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, então $u + v \in W_1 \cup W_2$ de acordo com o Teorema da Caraterização de Subespaço. Mas,

$$u + v = (1,1) + (1,-1) = (2,0)$$

e, $2 + 0 \neq 0$ e $2 - 0 \neq 0$, logo $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Consequentemente, $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
Esta discussão mostra que a união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é necessariamente um subespaço de V.

Teorema

Se W_1 e W_2 são dois subespaços de V, então $W_1 \cap W_2$ também é subespaço de V.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os subespaços

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \\ W_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\} \end{aligned}$$

de V. Determine $W_1 \cap W_2$.

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \left(\frac{2z}{3}, \frac{z}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Definição

Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Indicamos por $W_1 + W_2$ e chamaremos de **soma de W_1 com W_2** o seguinte subconjunto de V:

$$W_1 + W_2 = \{v \in V |\ v = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$

O resultado a seguir mostra que toda soma de dois subespaços de V é também um subespaço, chamado **subespaço soma**.

Teorema

Sejam W_1 e W_2 subespaços de V, então $W_1 + W_2$ é um subespaço de V. Este é o menor subespaço de V que contém cada um dos dois subespaços, no sentido que se um subespaço L de V é tal que $W_1 \subset L$ e $W_2 \subset L$, então $W_1 + W_2 \subset L$.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os subespaços

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0\}$$

de V. Determine $W_1 + W_2$.

Definição

Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Diremos que $W_1 + W_2$ é **soma direta** se $W_1 \cap W_2 = 0$, e neste caso denotaremos por $W_1 \oplus W_2$.

Definição

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços de V. Diremos que V é a **soma direta** de W_1 e W_2 se $V = W_1 \oplus W_2$.

Exemplo

Consideremos

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}$$

subespaços de $V = \mathbb{R}^2$. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é a soma direta de W_1 e W_2.

Existe uma única maneira de escrevermos um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor de W_1 com um vetor de W_2. Ou seja, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right)}_{\in\ W_1} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in\ W_2}$$

Em particular, o vetor $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$(2, 1) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in\ W_1} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in\ W_2}$$

Teorema

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços de V. Então, $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada elemento $v \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução da questão

9

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Combinação Linear e Subespaço Gerado

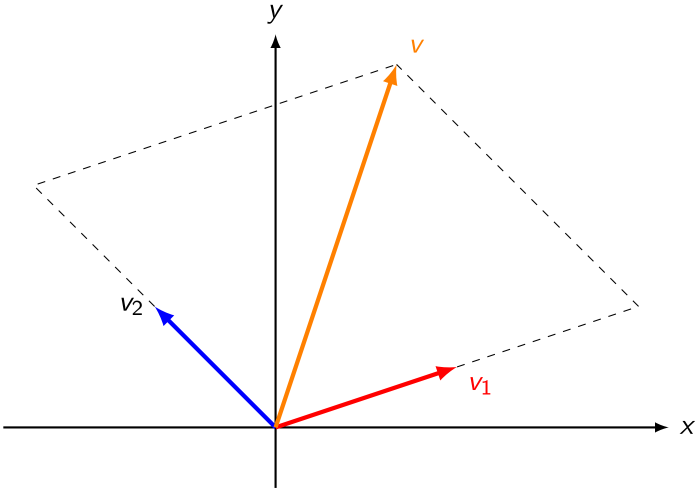
Definição

Um vetor $v \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Exemplo

Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o vetor $v = (2, 6) \in \mathbb{R}^2$. Dados os vetores $v_1 = (3, 1), v_2 = (-2, 2) \in \mathbb{R}^2$, escreva v como combinação linear de v_1 e v_2.


y
v
v_2
v_1
x

Exemplo

Dados os vetores $v_1 = (1, -3, 4)$ e $v_2 = (-1, 2, 5)$ no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, mostre que:

a) $v = (5, -13, 2)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2;

b) $v' = (2, 1, 4)$ não é uma combinação linear de v_1 e v_2.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e consideremos o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. O conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear dos vetores de S é um subespaço vetorial de V.

De fato, o conjunto W tem pelo menos um vetor, a saber, 0, pois

$$0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n$$

Sejam $u, v \in W$, ou seja,

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

pode-se escrever

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_n)v_i$$

$$\alpha u = (\alpha\alpha_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)v_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)v_i$$

Tendo em vista que $u + v \in W$ e $\alpha u \in W$, por serem combinações lineares de $v_1, \ldots, v_n$, conclui-se que W é um subespaço vetorial de V.

Definição

O subconjunto W é chamado **subespaço gerado** pelos vetores v_1, ..., v_n, ou gerado pelo conjunto S, e denotamos por $W = [v_1, \ldots, v_n]$.

Note que, formalmente, podemos escrever

$$W = \left\{ v \in V |\ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_i \in S \subset V, \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

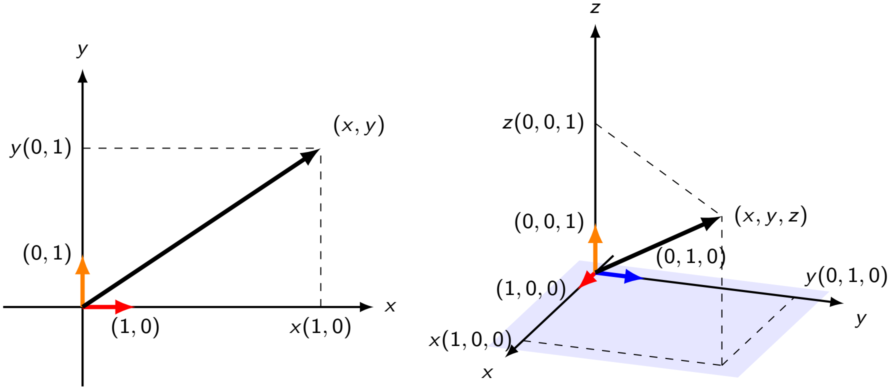
Estendemos a definição de subespaço gerado para o caso $S = \emptyset$ mediante a seguinte convenção: o conjunto vazio gera o espaço vetorial nulo e denotamos por $W = [\emptyset] = \{0\}$.

Teorema

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $w \in V$ é tal que $w \in W = [S]$, então $[S \cup \{w\}] = [S]$, ou seja $[v_1, \ldots, v_n, w] = [v_1, \ldots, v_n]$.

Exemplo

Os vetores $\{(1,0),(0,1)\}$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. E, os vetores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ geram o $\mathbb{R}^3$.



Exemplo

Mostre que os vetores $\{(1,2),(3,-1),(2,-3)\}$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Sejam o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in V$. Determine $[v_1, v_2]$ quando:

a) $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,0)$;

b) $v_1 = (1,0,-1)$ e $v_2 = (1,1,1)$.

Exemplo

Determine se os vetores $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (2,1,3)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

10 , 11 , 12 e 13

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

(In)dependência Linear

Definição

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.

1. Dizemos que S é **linearmente independente** (ou *l.i.*, ou *LI*) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad (\textit{para } v_i \in S \textit{ e } \alpha_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n)$$

   implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
2. O conjunto S é dito **linearmente dependente** (ou *l.d.*, ou *LD*) se não for linearmente independente.

Observações:

1. Por convenção, o conjunto vazio ($\emptyset \subset V$) é *LI*;
2. As definições de LI e LD dependem do corpo base do espaço considerado, como será ser visto em exemplos.

Exemplo

No $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, determine se cada um dos conjuntos a seguir é *LI* ou *LD*.

A) $S_1 = \{(1,2,3),(1,4,9),(1,8,27)\}$

B) $S_2 = \{(3,-1,2),(1,-2,-1),(2,6,8)\}$

Exemplo

Considere, no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é *LI* ou *LD*.

Exemplo

Seja $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\} \subset \mathbb{C}^2$. Mostre que:

a) Se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial então S é LD.

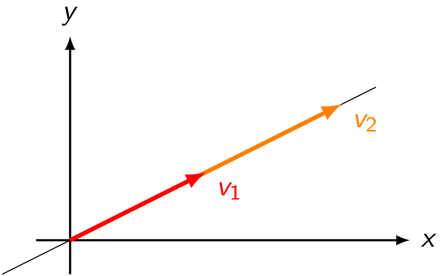
b) Se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial então S é LI.

Teorema (da Caracterização de Conjunto LD)

Um conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos outros.

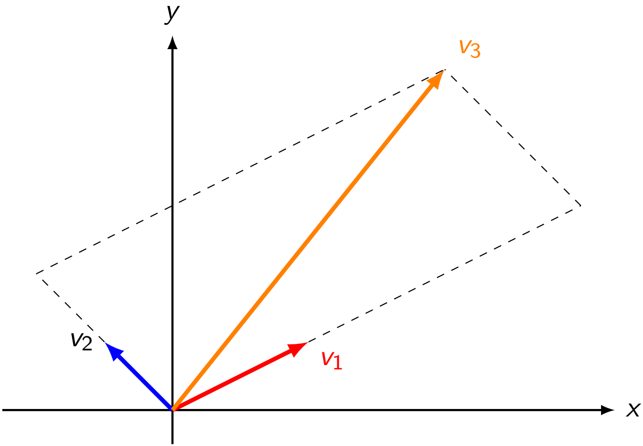
Exemplo

O conjunto $S = \{(2,1),(4,2)\}$ de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é linearmente dependente.



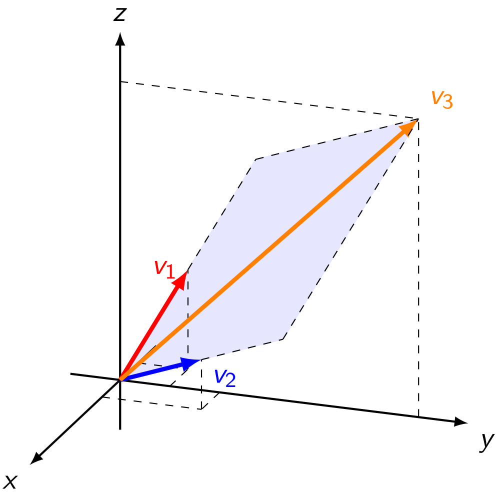
Exemplo

O conjunto $S = \{(2,1), (-1,1), (4,5)\}$ de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é linearmente dependente.



Exemplo

O conjunto $S = \{(-1, 1, 2), (1, 2, 1), (0, 6, 6)\}$ de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.



Exemplo

Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $F(\mathbb{R})$. Verifique se cada um dos conjuntos a seguir é LI ou LD.

A) $\{-3, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$

B) $\{x \sec^2 x, x \operatorname{tg}^2 x - 2, x + 2\}$

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, da definição de (in)dependência linear, combinada com propriedades de espaço vetorial, decorrem as seguintes propriedades.

Proposição

Se um conjunto finito $S \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é LD.

Proposição

Se $S = \{v\} \subset V$ *e* $v \neq 0$*, então* S *é LI.*

Proposição

Sejam S_1 *e* S_2 *subconjuntos finitos e não vazios de* V*. Se* $S_1 \subset S_2$ *e* S_1 *é LD, então* S_2 *também é LD.*

Proposição

Sejam S_1 *e* S_2 *subconjuntos finitos e não vazios de* V*. Se* $S_1 \subset S_2$ *e* S_2 *é LI, então* S_1 *também é LI.*

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

16 , 17 , 18 , 19 e 20

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Base e Dimensão

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dizemos que $B \subset V$ é uma **base** de V se

1. $[B] = V$; (B é um conjunto gerador de V)
2. B é LI. (B é linearmente independente)

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo

O conjunto $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Esta base é chamada base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

O conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Esta base é chamada base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

O conjunto das $m \cdot n$ matrizes reais

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base do espaço $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Esta base é chamada base canônica de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo

O conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, é uma base para o espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$. Esta base é chamada base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

Exemplo

O conjunto $\emptyset$ é uma base para o espaço vetorial $\{0\}$, conforme convenção.

Observações:

1. As bases canônicas são assim chamadas por sua naturalidade e as vezes denotamos por *Can*.
2. Obviamente, os espaços vetoriais supracitados têm outras bases.

Exemplo

Verifique se os vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Verifique se o conjunto $B = \{(1, -1, 1), (1, 2, 2), (-1, 1, 3)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Definição

Dizemos que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é **finitamente gerado** se possui um conjunto gerador finito.

Exemplo

Tomemos $P(\mathbb{R})$, o conjunto de todos os polinômios reais. $P(\mathbb{R})$, com o par de operações usuais, é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, mas não é finitamente gerado.

De fato, dados $S = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset P(\mathbb{R})$, supondo que p_i seja não nulo e que p_n seja o polinômio de maior grau de S, então o grau de qualquer combinação linear

$$\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n$$

não ultrapassa o grau de p_n. Assim, $[S]$ só contém polinômios de grau menor ou igual ao de p_n. Como $P(\mathbb{R})$ compreende todos os polinômios reais, existem nesse espaço vetorial polinômios de grau maior que o de p_n. Logo, $[S] \neq P(\mathbb{R})$ para todo conjunto finito $S \subset P(\mathbb{R})$.

Teorema (da Invariância)

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então, duas bases quaisquer de V tem o mesmo número de elementos.

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se V admite uma base finita, então chamamos de **dimensão** de V o número de elementos de tal base. Caso contrário dizemos que a dimensão de V é infinita. Denotamos a dimensão de V sobre $\mathbb{K}$ por $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Exemplo

Dimensão de alguns espaços vetoriais:

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$
2. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$
3. $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$
4. $\dim P(\mathbb{R}) = \infty$
5. $\dim \{0\} = 0$

Teorema

Todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base.

Teorema

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se W é um subespaço de V, então W é de dimensão finita e $\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V$. Além disso, se $\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V$ então $W = V$.

Teorema (da Caracterização de Base)

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. O subconjunto B é uma base de V se, e somente se, cada $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de B.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

21 , 22 , 23 , 24 , 25 e 26

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Coordenadas e Dimensão da Soma de Dois Subespaços

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Vamos fixar a ordem dos elementos de B e por isso costumamos chamá-la de **base ordenada** de V.

Segue do Teorema da Caracterização de Base que, dado $v \in V$ existem univocamente determinados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Devido a esta unicidade, é comum descrevermos o elemento v por meio dos valores dos $\alpha_i{}'s$, isto é,

$$[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{1}$$

Também podemos considerar a matriz $n \times 1$, ou seja,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dizemos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as **coordenadas** de v em relação à base (ordenada) B. A n-upla à direita de 1 é chamada **vetor-coordenada de v em relação à base B**, e a matriz à direita de 2 é chamada **matriz-coluna de v em relação à base B** ou **matriz das coordenadas de v em relação à base B**.

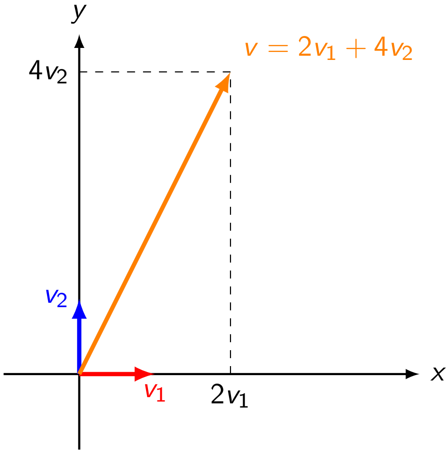
Exemplo

Dado o vetor $v = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$, determine as coordenadas de v em relação à base:

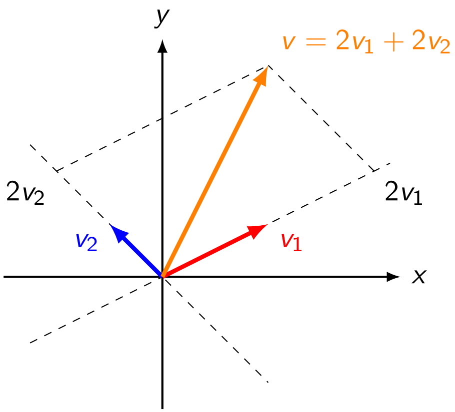
a) Canônica, Can;

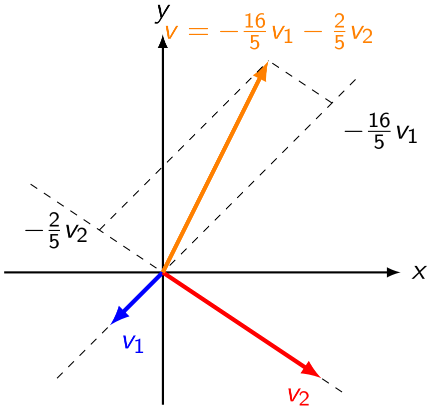
b) $B = \{(2, 1), (-1, 1)\}$;

c) $C = \{(-1, -1), (3, -2)\}$.



y
$v = 2v_1 + 4v_2$
$4v_2$
v_2
x
v_1
$2v_1$


y
$v = 2v_1 + 2v_2$
$2v_2$
$2v_1$
v_2
v_1
x


y
$v = -\frac{16}{5}v_1 - \frac{2}{5}v_2$
$-\frac{16}{5}v_1$
$-\frac{2}{5}v_2$
x
v_1
v_2

Exemplo

Determine o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ cuja matriz-coluna em relação à base $B = \{(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como vimos anteriormente, se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e W é uma subespaço de V, temos a seguinte relação: $\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V$. Vimos também que se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ são subespaços de V, e mais, que os mesmos são de dimensão finita. Um questionamento que nos cabe nesse momento é o seguinte: as dimensões de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ estão, de alguma maneira, relacionadas? E, em caso afirmativo, qual a relação?

Teorema

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e W_1 e W_2 dois subespaços de V, então

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) + \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2$$

Demonstração.

Suponha inicialmente que $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ e seja $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2$ é subespaço tanto de W_1 como de W_2, podemos estender B a uma base de W_1 e a uma base de W_2 pelo Lema 2.10.2. Sejam $B_1 = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r\}$ uma base de W_1 e $B_2 = \{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_s\}$ uma base de W_2, com $B \subset B_1$ e $B \subset B_2$. O resultado estará provado se mostrarmos que o conjunto

$$C = B_1 \cup B_2 = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$$

é uma base de $W_1 + W_2$, pois poderemos aplicar a definição de dimensão. □

Demonstração.

Logo, temos que $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W_1 = n + r$, $\dim_{\mathbb{K}} W_2 = n + s$ e $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = n + r + s$, e portanto

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) + \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2) &= (n + r + s) + n \\
&= (n + r) + (n + s) \\
&= \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2
\end{aligned}$$

No caso em que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, sejam B_1 e B_2 bases de W_1 e W_2, respectivamente. De forma análoga mostra-se que $B_1 \cup B_2$ é uma base de $W_1 + W_2$, donde segue a tese. $\square$

Exemplo

Sejam

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 5x,\ z = 0\right\} \\
&\text{e} \\
W_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3y,\ z = -y\right\}
\end{aligned}
$$

subespaços de $\mathbb{R}^3$. Determine as dimensões $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

27 , 28 , 29 e 30

da Lista de Exercícios 1 de Espaço Vetorial, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.


Bom Trabalho!