Álgebra Linear I
Transformação Linear

Prof. Joab dos Santos Silva [1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

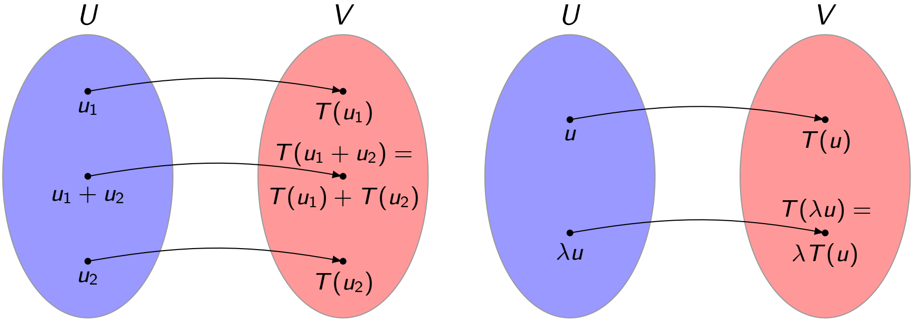
Sumário

Definição, Exemplos e Propriedades

Definição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma função $T : U \to V$ é uma **transformação linear** se

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, $\forall\ u_1, u_2 \in U$
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\ u \in U$

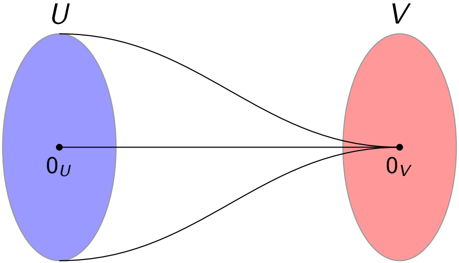


Exemplo (Operador Identidade)

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. A função identidade $Id : V \to V$ definida por $Id(v) = v$, $\forall\, v \in V$, é um operador linear.

Exemplo (Transformação Nula)

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. A função nula (ou função zero) $0 : U \to V$ definida por $0(u) = 0$, $\forall\, u \in U$, é uma transformação linear.



Exemplo

Dada a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y, -3y + 2z)$, $\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, verifique se T é uma transformação linear.

Exemplo

Considere a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - 2y, x^2)$, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verifique se T é uma transformação linear.

Exemplo (**Operador Derivação**)

Seja $V = P(\mathbb{R})$, espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$. A função

$$\begin{array}{rccc} D\ : & P(\mathbb{R}) & \longrightarrow & P(\mathbb{R}) \\ & a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 & \longmapsto & n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 \end{array}$$

que associa a cada $p \in P(\mathbb{R})$ a sua derivada p', ou seja, para cada $p \in P(\mathbb{R})$, $D(p) = p'(x)$, é um operador linear.

Exemplo

Seja $C([a,b],\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A função

$$\begin{array}{rccc} J & : & C([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \end{array}$$

que associa a cada f a sua integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, ou seja, para cada $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $J(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, é uma transformação linear.

Proposição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Então uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se, e somente se,

$$T(u_1 + \lambda u_2) = T(u_1) + \lambda T(u_2)$$

$\forall\, u_1, u_2 \in U$ *e* $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

1. $T(0_U) = 0_V$, *onde 0_U e 0_V denotam os vetores nulos de U e V, respectivamente.*
2. $T(-u) = -T(u)$, $\forall\, u \in U$.
3. $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$, *onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in U$, para $1 \leq i \leq n$.*

Exemplo

Sejam $T : U \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, $B = \{u_1, u_2, u_3\} \subset U$ e $u \in U$ tal que $u = 3u_1 - 2u_2 + u_3$. Calcule $T(u)$ sabendo que $T(u_1) = 5$, $T(u_2) = 4$ e $T(u_3) = -6$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

1 , 2 , 3 , 4 e 5

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Transformação Linear Completamente Definida

Teorema

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ for uma base de U e se $v_1, \ldots, v_n$ são vetores de V, então existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Demonstração.

Dado um vetor $u \in U$, como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, existem únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Definamos, para este vetor u, $T(u)$ como sendo o vetor $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$.

Devido à unicidade dos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, a função $T : U \to V$ está bem definida para se associar a cada $u \in U$ um vetor $T(u) \in V$.

Observemos que fixado i, $1 \leq i \leq n$, temos $\square$

Demonstração (Cont.)

$$T(u_i) = T(0u_1 + \cdots + 1u_i + \cdots + 0u_n) = v_i$$

Para mostrarmos que T é linear, sejam $u' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
T(u + \lambda u') &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda\alpha_i) u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda\alpha_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) + \lambda T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \\
&= T(u) + \lambda T(u')
\end{aligned}$$

Portanto, T é linear. □

Demonstração (Cont.)

Para mostrar que T é única, considere uma transformação $S : U \to V$ tal que $S(u_i) = v_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$. Para $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in U$ com λ_i'$s \in \mathbb{K}$, teremos que

$$S(u) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \overset{\text{prop}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \overset{\text{def}}{=} T(u)$$

Como $u \in U$ foi tomado arbitrário, segue que $S = T$, o que mostra que a transformação T com $T(u_i) = v_i$ é única. □

Exemplo

Sabendo que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear e que $T(1,2) = (3,-1)$ e $T(0,1) = (1,2)$, determine $T(x,y)$, onde (x,y) é um vetor genérico de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(2,-1) = (-1, 8, -3)$ e $T(1,3) = (10,-3,2)$.

a) Determine $T(x,y)$;

b) Calcule $T(-1,1)$.

Exemplo

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ uma transformação linear e $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base de $M_2(\mathbb{R})$, sendo

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que $T(u_1) = x - 1$, $T(u_2) = -1$, $T(u_3) = -x - 2$ e $T(u_4) = -x$, calcular $T\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

6 e 7

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

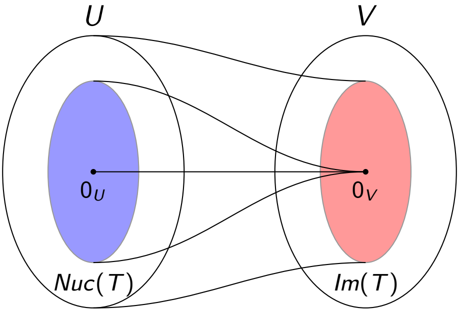
No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Núcleo e Imagem

Definição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. O conjunto $\{u \in U|\ T(u) = 0\}$ é chamado de **núcleo de** T e denotamos por $Nuc(T)$.
2. O conjunto $\{v \in V|\ \exists\ u \in U \text{ com } T(u) = v\}$ é chamado de **imagem de** T e denotamos por $Im(T)$.



Proposição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

1. *$Nuc(T)$ é um subespaço de U e $Im(T)$ é um subespaço de V.*
2. *T é injetora se, e somente se, $Nuc(T) = \{0\}$.*

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, x + 2y, y)$. Determine $Nuc(T)$ e $Im(T)$.

Exemplo

Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$.

LEMA

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, estão $Im(T) = [T(u_1), \ldots, T(u_n)]$.

TEOREMA (TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM)

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, com $\dim_{\mathbb{K}} U$ finita, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} Nuc(T) + \dim_{\mathbb{K}} Im(T)$$

EXEMPLO

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(a, b, c) = (a + b)x^2 + (c - a)x + (b + c)$. Determine as dimensões do núcleo e da imagem de T.

Exemplo

Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nuc(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 2x - y\}$.

Corolário

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, com $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V = n \geq 1$, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, as seguintes afirmações são equivalente:

1. *T é sobrejetora.*
2. *T é bijetora.*
3. *T é injetora.*
4. *T transforma uma base de U em uma base de V.*

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

8 , 9 , 10 , 11 e 12

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

O Espaço $\mathcal{L}(U, V)$ Operações com Transformações Lineares

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, denotaremos por $F(U,V)$ o conjunto de todas as funções $F: U \to V$. Defina as seguintes operações:

$$\begin{array}{rcccl} + : & F(U,V) \times F(U,V) & \longrightarrow & F(U,V) & \\ & (F,G) & \longmapsto & (F+G)(u) & = \ F(u) + G(u) \end{array}$$

$\forall\ u \in U$, e

$$\begin{array}{rcccl} \cdot : & \mathbb{K} \times F(U,V) & \longrightarrow & F(U,V) & \\ & (\alpha,F) & \longmapsto & (\alpha F)(u) & = \ \alpha F(u) \end{array}$$

$\forall\ u \in U$.

Com estas operações, o conjunto $F(U,V)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, chamado **espaço das funções de** U **em** V, onde a função nula é o vetor nulo e o negativo de um vetor $F \in F(U,V)$ é a função $-F$ dada por $(-F)(u) = -F(u)$.

Consideremos, agora, o subconjunto de $F(U, V)$ de todas as transformações lineares de U em V, o qual denotaremos por $\mathcal{L}(U, V)$. Temos que $\mathcal{L}(U, V)$ é um subespaço de $F(U, V)$, chamado **espaço das transformações lineares de U em V**.

De fato, para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos que

$$
\begin{aligned}
(T_1 + \alpha T_2)(u_1 + \lambda u_2) &= T_1(u_1 + \lambda u_2) + \alpha T_2(u_1 + \lambda u_2) \\
&= T_1(u_1) + \lambda T_1(u_2) + \alpha T_2(u_1) + \alpha\lambda T_2(u_2) \\
&= [T_1(u_1) + \alpha T_2(u_1)] + \lambda[T_1(u_2) + \alpha T_2(u_2)] \\
&= (T_1 + \alpha T_2)(u_1) + \lambda(T_1 + \alpha T_2)(u_2)
\end{aligned}
$$

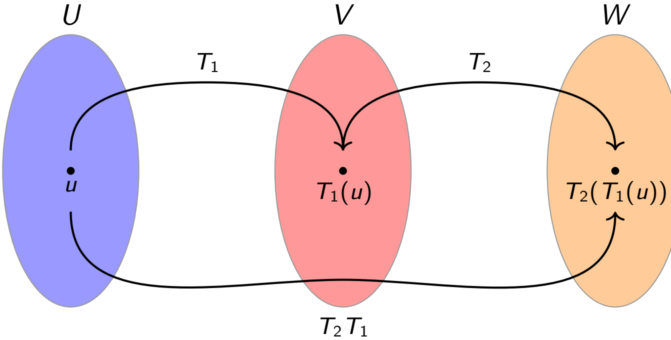
com isso, a função $T_1 + \lambda T_2$, $\forall\ u \in U$, é uma transformação linear e, portanto, $T_1 + \lambda T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$.

Definição

Sejam U, V e W três $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $T_1 \in \mathcal{L}(U, V)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, o **produto** $T_2 T_1$ ou **aplicação composta** de T_2 com T_1 é definido por

$$T_2 T_1(u) = (T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) \ , \ \forall \ u \in U$$

onde o domínio de T_2 coincide com o contradomínio de T_1.



Teorema

Sejam U, V e W três $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $T_1 \in \mathcal{L}(U, V)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. Então, $T_2 T_1(u) \in \mathcal{L}(U, W)$.

Proposição

Sejam U, V, W e Z quatro $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $T_1, {T_1}' \in \mathcal{L}(U, V)$, $T_2, {T_2}' \in \mathcal{L}(V, W)$, $T_3 \in \mathcal{L}(W, Z)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

1. $T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1$ *(Associatividade)*
2. $(T_2 + {T_2}') T_1 = T_2 T_1 + {T_2}' T_1$ *(Distributividade à esquerda)*
3. $T_2(T_1 + {T_1}') = T_2 T_1 + T_2 {T_1}'$ *(Distributividade à direita)*
4. $\alpha(T_2 T_1) = (\alpha T_2) T_1 = T_2(\alpha T_1)$ *(Homogeneidade)*
5. $T_1 Id_U = T_1 = Id_V T_1$

Exemplo

Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definidas por $T_1(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$ e $T_2(x, y) = (y - x, x + y, x)$. Determine $T_1 + T_2$, $\frac{T_1}{2}$ e $2T_1 - 3T_2$.

Exemplo

Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $T_1(x, y) = (x+2y, x-y)$ e $T_2(x, y) = (2x, -y)$. Determine T_2T_1 e T_1T_2.

Definição

Sejam $T \in \mathcal{L}(V)$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. A n-**ésima potência de** T, denotada por T^n, é definida por

$$T^n = \begin{cases} Id_V & , \text{ se } n = 0 \text{ e } T \neq 0 \\ \underbrace{TTT\ldots T}_{n \text{ vezes}} & , \; n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo

Determine T^2 para cada operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

a) $T(x, y) = (y, x)$

b) $T(x, y) = (x - y, x - y)$

c) $T(x, y) = \left(\dfrac{4x + 2y}{5}, \dfrac{2x + y}{5}\right)$

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução da questão

13

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Transformação Inversa e Isomorfismo

Seja $T : U \to V$ uma função bijetora. Em particular, para cada $v \in V$ existe um único $u_v \in U$ tal que $T(u_v) = v$. Com isso, podemos definir uma função $T' : V \to U$ por $T'(v) = u_v$, tal que

$$\begin{aligned} (T'T)(u_v) &= T'(T(u_v)) = T'(v) = u_v \\ (TT')(v) &= T(T'(v)) = T(u_v) = v \end{aligned}$$

ou seja, $T'T = Id_U$ e $TT' = Id_V$. Chamamos T' de função inversa de T e denotamos por T^{-1}.

Teorema

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(U, V)$ uma bijeção. Então, $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$ e é uma bijeção.

Quando $T \in \mathcal{L}(U, V)$ admite a inversa T^{-1}, dizemos que T é **invertível**, **inversível**, **regular** ou **não-singular**.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x,y) = (3x - 2y, -x + y)$. Verifique se T é bijetora e, em caso afirmativo, determine T^{-1}.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definido por $T(x,y,z) = (2x - y, x + z, z - y)$. Mostre que T é bijetora e calcule T^{-1}.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x,y) = (x - y, x + 2y, x)$. Verifique se T é bijetora e, em caso afirmativo, determine T^{-1}.

Teorema

Sejam U, V e W três $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T_1 \in \mathcal{L}(U,V)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ invertíveis. Então $T_2 T_1$ é invertível e $(T_2 T_1)^{-1} = {T_1}^{-1} {T_2}^{-1}$.

Definição

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Se T for bijetora, então dizemos que T é um **isomorfismo linear**, ou simplesmente **isomorfismo**, de U em V.

Se existir um isomorfismo $T \in \mathcal{L}(U, V)$, estão dizemos que U e V são **isomorfos** e denotamos por $U \simeq V$. Quando $U = V$, um isomorfismo $T \in \mathcal{L}(V)$ é dito um **automorfismo** de V.

Exemplo

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x, y) = (x - 2y, 2x + 5y)$ é um isomorfismo no $\mathbb{R}^2$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução da questão

14

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n e m, respectivamente, $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de U e V, respectivamente.

Tomando $u \in U$, vamos escrevê-lo como combinação linear de B:

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$$

para certos $x_j \in \mathbb{K}$. Ou seja, $[u]_B = (x_1, \ldots, x_n)$. Descrevamos sua imagem $v = T(u) \in V$ como combinação linear de C:

$$v = T(u) = y_1 v_1 + \cdots + y_m v_m = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i \tag{1}$$

para certos $y_i \in \mathbb{K}$. Ou seja, $[T(u)]_C = (y_1, \ldots, y_m)$. Por outro lado,

$$T(u) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(u_j)$$

Sendo $T(u_j) \in V$, vamos descrevê-los como combinação linear dos vetores de C. Assim,

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m &= \sum_{i=1}^{m} a_{i1}v_i \\
T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m &= \sum_{i=1}^{m} a_{i2}v_i \\
&\vdots & \vdots \\
T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m &= \sum_{i=1}^{m} a_{in}v_i
\end{aligned}$$

para certos $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Em geral, $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} T(u) &= x_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m) + x_2(a_{12}v_1 + \cdots + a_{m2}v_m) + \cdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{mn}v_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)v_1 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)v_2 + \cdots \\ &\quad + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)v_m \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) v_i \tag{2}$$

Comparando as expressões 1 e 2 para $T(u)$, devido a unicidade da representação em relação à uma base, temos que

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

para cada $1 \leq i \leq m$. Ou seja,

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Reescrevendo na forma matricial, teremos

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Isto é, $[T(u)]_C = A \cdot [u]_B$, onde $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Denotemos a matriz A por $[T]_C^B$.

A discussão anterior justifica o seguinte resultado.

Teorema

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases ordenadas de U e V, respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então $[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$.

Observações:

1) A matriz $[T]_C^B$ é de ordem $m \times n$ quando $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ e $\dim_{\mathbb{K}} V = m$;
2) A matriz $[T]_C^B$ é tal que, para cada $1 \leq j \leq n$, a j-ésima coluna é formadas pelas componentes da imagem do vetor $T(u_j)$ em relação à base C:

$$[T(u_1)]_C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(u_2)]_C = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, [T(u_n)]_C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

3) A matriz $[T]_C^B$ depende das bases ordenadas B e C consideradas.

Definição

A matriz $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, denotada por $[T]_C^B$, é chamada de **matriz da transformação linear T com relação às bases B e C.**

Observações:

I) Quando $T \in \mathcal{L}(V)$ e $B = C$, denotamos $[T]_B^B$ simplesmente por $[T]_B$;

II) Para $T \in \mathcal{L}(U, V)$, se B e C são as bases canônicas, denotamos $[T]_C^B$ simplesmente por $[T]$ e chamamos de **matriz canônica de T**. De forma análoga quando $T \in \mathcal{L}(V)$ e $B = C$ é a base canônica;

III) Sendo $T = Id_V \in \mathcal{L}(V)$, denotamos $[Id_V]_C^B$ por $[I]_C^B$.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (2x+y-z, x+2y)$ e considere as bases $B = \{(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ e $C = \{(-1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

a) Determine $[T]_C^B$.

b) Se $u = (5, -1, 2)$ (em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$), calcule $[T(u)]_C$ utilizando a matriz encontrada no item a).

Exemplo

Suponha que a matriz de uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, referente às bases $B = \{(1,2),(2,1)\}$ e $C = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, seja dada por

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine $T(x, y)$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

15 , 16 e 17

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Matriz de Mudança de Base

Considerando, particularmente, $U = V$ e $T = Id_V$ no Teorema da Matriz de uma Transformação Linear, obtemos:

$$[v]_C = [Id(v)]_C = [I]_C^B \cdot [v]_B$$

ou seja, as coordenadas de um vetor $v \in V$ em relação à base C são obtidas através da multiplicação da matriz $[I]_C^B$ pela matriz das coordenadas de v em relação à B. Assim, o operador identidade possibilita estabelecermos uma relação entre as matrizes $[v]_B$ e $[v]_C$ de um vetor $v \in V$.

Definição

A matriz $[I]_C^B$ é chamada de **matriz de mudança da base B para a base C**.

Para cada $1 \leq j \leq n$, a j-ésima coluna da matriz $[I]_C^B$ é formada pelas componentes da imagem do vetor $Id(u_j) = u_j$ em relação à base C.

Com isso:

- A matriz de mudança da base B para a base C é obtida determinando as coordenadas de cada vetor $u_j \in B$ em relação à base C e colocando-as na j-ésima coluna de $[I]_C^B$.

De forma análoga:

- A matriz $[I]_B^C$ de mudança da base C para a base B é obtida determinando as coordenadas de cada vetor $v_j \in C$ em relação à base B e colocando-as na j-ésima coluna de $[I]_B^C$.

Exemplo

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e a base $B = \{(1,2),(-4,3)\}$, determine a matriz de mudança da base B para a base canônica C de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Sejam $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(2,-1),(1,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

A) Determine $[I]_C^B$.

B) Dado $v = (4,3)$, determine $[v]_C$ utilizando a matriz $[I]_C^B$.

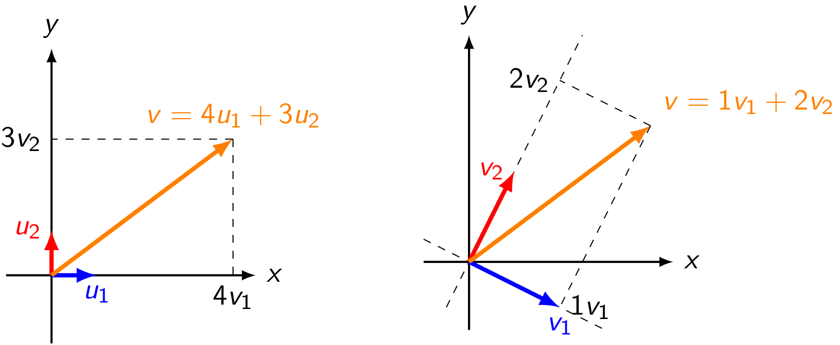


Figura: Coordenadas de $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ em relação às bases B e C.

Considerando as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Verifique!). O que ocorre com os produtos

$$[I]_C^B \cdot [I]_B^C \quad \text{e} \quad [I]_B^C \cdot [I]_C^B?$$

Reflita sobre o resultado.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

18 e 19

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.

Matriz do Produto e Semelhança

Para $T_1 \in \mathcal{L}(U,V)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ vimos que $T_2T_1 \in \mathcal{L}(U,W)$. Consequentemente, se B, C e D são bases para U, V e W, respectivamente, então T_2T_1 tem uma representação matricial em relação às bases B e D, sendo assim natural o seguinte questionamento: qual a relação, caso exista, entre a matriz $[T_2T_1]_D^B$ e as matrizes $[T_1]_C^B$ e $[T_2]_D^C$?

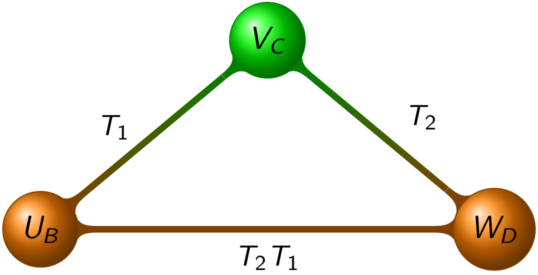


Figura: Diagrama da matriz do produto de transformações.

Teorema

Sejam U, V e W três $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n, m e r, e B, C e D suas bases, respectivamente. Se $T_1 \in \mathcal{L}(U,V)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$, então $[T_2T_1]_D^B = [T_2]_D^C \cdot [T_1]_C^B$.

Corolário

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão $n \geq 1$ e B e C bases de U e V, respectivamente. Uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(U,V)$ é um isomorfismo (invertível) se, e somente se, $[T]_C^B$ for invertível. Além disso, neste caso,

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$$

Sendo $[I]_C^B$ a matriz do operador identidade, que é um automorfismo (bijetor), segue que $[I]_C^B$ é invertível. Ainda, mais particularmente, se fizermos $U = V$ e $T = Id$ ($T^{-1} = Id$), a igualdade

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$$

se torna

$$[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$$

Ou seja, a matriz de mudança da base B para a base C é invertível e sua inversa é a matriz de mudança da base C para a base B.

Exemplo

Sejam $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definidas por

$$T_1(x, y) = (x - 3y, 2x + y, -x + y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y, z) = (x + y, x - z, -y + 2z)$$

Determine as matrizes $[T_1]$, $[T_2]$ e $[T_2 T_1]$, e então verifique que $[T_2 T_1] = [T_2] \cdot [T_1]$.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz em relação às bases canônicas é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine, se possível, $\left[T^{-1}\right]$. Em caso afirmativo, calcule a T^{-1} utilizando a matriz $\left[T^{-1}\right]$.

Exemplo

Considere a base $B = \{(1,1),(1,2)\}$ e a base canônica $C = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule as matrizes de mudança de base $[I]_C^B$ e $[I]_B^C$.

Definição

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. A matriz A é dita **semelhante** a matriz B se existir uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A = P^{-1}BP$, e denotamos por $A \sim B$.

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(V)$ e B e C bases de V, qual a relação entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$?

Fazendo substituições adequadas, segue que $[T]_B = [I]_B^C \cdot [T]_C \cdot [I]_C^B$.

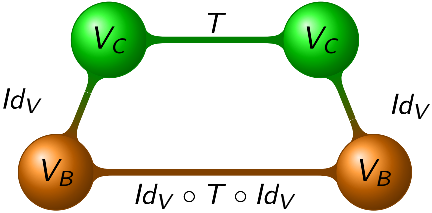


Figura: Diagrama da relação entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$.

Como $[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$, denotando $[I]_C^B$ por P segue que

$$[T]_B = P^{-1} \cdot [T]_C \cdot P$$

Portanto, segue da discussão anterior que dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita $n \geq 1$ e duas bases B e C, para cada operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são semelhantes.

Exemplo

Considere $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x, y) = (4x - y, 2x + y)$ e as bases

$$B = \{(1,2),(1,1)\} \quad \text{e} \quad C = \{(1,0),(0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Determine as matrizes $[T]_C$ e $P = [I]_C^B$, e as use para determinar $[T]_B$.

Exercícios Propostos

Para exercitar os conhecimentos trabalhados nesse encontro e discuti-los na aula presencial, propomos a resolução das questões

20 , 21 e 22

da Lista de Exercícios 2 de Transformação Linear, disposta no site

www.joabssilva.com.br/algebra-linear-1/

No site também estão dispostos os slides utilizados nestes vídeos.


Bom Trabalho!