Álgebra Linear I
Diagonalização

Prof. Joab dos Santos Silva [1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Sumário

Autovalores, Autovetores e Polinômio Característico

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$.

1. Um **autovalor de** T é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.
2. Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo de $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de **autovetor de** T **associado a** λ.

De forma análoga, tem-se.

Definição

Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um **autovalor** da matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ quando λ é um autovalor do operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, cuja matriz em relação à base canônica é A. Logo, existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{K}^n$, chamado **autovetor**, tal que $T(v) = \lambda v$ ou, equivalentemente, uma matriz não nula $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $AX = \lambda X$.

Sinônimos:

- "autovalor", "valor próprio" e "valor característico";
- "autovetor", "vetor próprio" e "vetor característico".

Observação: Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é não injetor, então 0 é um autovalor de T. De fato, como T é não injetor, existe um vetor não nulo $v \in Nuc(T)$. Daí,

$$T(v) = \underbrace{0}_{vetor} = \underbrace{0}_{escalar} \cdot v$$

como queríamos.

Exemplo (Operador Identidade)

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $Id \in \mathcal{L}(V)$, então todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = \lambda(x, y)$. Todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ. E mais,

i) Se $\lambda = 1$, T é a identidade;

ii) Se $0 < \lambda < 1$, T contrai o vetor e preserva o sentido;

iii) Se $\lambda > 1$, T dilata o vetor e preserva o sentido;

iv) Se $\lambda = -1$, T inverte o sentido do vetor;

v) Se $-1 < \lambda < 0$, T contrai o vetor e inverte o sentido;

vi) Se $\lambda < -1$, T dilata o vetor e inverte o sentido;

Portanto, toda direção é preservada por T. (Figura 1)

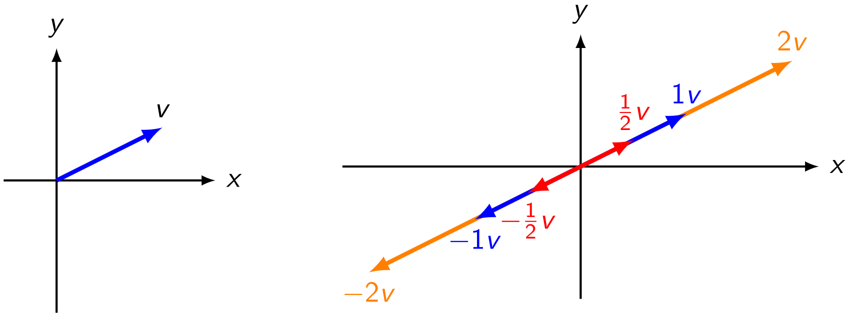

Figura: Representação Geométrica da Transformação Linear $T(x,y) = \lambda(x,y)$.

Exemplo (Reflexão em Relação ao Eixo x)

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x,y) = (x,-y)$, cuja representação geometricamente está ilustrada na Figura 2.

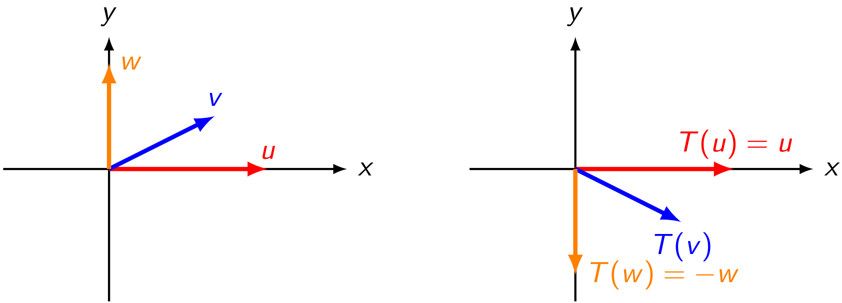

Figura: Representação Geométrica da Reflexão em Relação ao Eixo Ox.

- Os vetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, são autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = 1$;
- Os vetores $(0, y)$, $y \neq 0$, são autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = -1$.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x,y) = (y, -x)$. T não possui autovalores e, consequentemente, não possui autovetores.

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ for um autovalor de T, então existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = \lambda v$, o que equivale a

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \iff Nuc(T - \lambda Id) \neq \{0\}$$

donde segue que

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \iff \det\left([T]_B - \lambda I_n\right) = 0 \tag{1}$$

Logo, a equivalência 1 pode ser reescrita como

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \iff \lambda \text{ é uma raiz de } \det\left([T]_B - \lambda I_n\right)$$

Teorema

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. *λ é um autovalor de T;*
2. *O operador $T - \lambda Id$ é singular (não invertível);*
3. $\det\left([T]_B - \lambda I_n\right) = 0$*, onde B é uma base de V.*

Exemplo

Considere o operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$ e as bases

$$B = \{(1,0),(0,1)\} \quad , \quad C = \{(1,1),(-1,1)\} \quad \text{e} \quad D = \{(1,2),(3,4)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Determine $\det\left([T]_B - \lambda I_2\right)$, $\det\left([T]_C - \lambda I_2\right)$ e $\det\left([T]_D - \lambda I_2\right)$.

$$\det([T]_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\det([T]_C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\det([T]_D - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\dfrac{15}{2}-\lambda & -\dfrac{31}{2} \\ \dfrac{7}{2} & \dfrac{15}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Sejam B e C duas bases do $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, como as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são semelhantes, ou seja,

$$[T]_B = P^{-1}[T]_C P \quad \text{onde} \quad P = [I]_C^B$$

segue que $\det([T]_B - \lambda I_n)$ não depende da base B escolhida.

Definição

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(V)$ e B uma base de V. Chamamos o polinômio $\det([T]_B - \lambda I_n)$ de **polinômio característico de** T, e denotamos por $p_T(\lambda)$.

Cálculo de Autovalores e Autovetores

Consideremos o subconjunto de V formado por todos os autovetores de T associados a λ mais o vetor nulo

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

Temos que

$$v \in V_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad v \in Nuc(T - \lambda Id)$$

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $T \in \mathcal{L}(V)$ e λ um autovalor de T. O subespaço V_λ é chamado **autoespaço de V associado a λ**.

Em resumo, para determinarmos autovalores e autovetores de um operador linear T (e, consequentemente, de uma matriz) devemos:

1. Obter o polinômio característico de T. As raízes deste polinômio são os autovalores de T.
2. Resolver $T(v) = \lambda v$ para todos os autovalores λ ou, equivalentemente, determinar os subespaços $Nuc(T - \lambda Id)$ para cada λ. As soluções (ou vetores) não nulas são os autovetores de T.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (3x - 2y, -4x + y)$. Determine os autovalores e autovetores de T, caso existam.

Exemplo

Considere o operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definido por $T(x, y, z) = (x + 2z, -x + z, x + y + 2z)$. Determine os autovalores e autovetores de T, caso existam.

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização de Operadores 1

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é dito **diagonalizável** se existe uma base B de V tal que a matriz $[T]_B$ é diagonal.

Diante dessa definição alguns questionamentos surgem naturalmente, como:

- Sempre existe uma base em relação a qual T é diagonalizável?
- Caso existe tal base, como a determinamos?
- Essa base é única?

Teorema

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é diagonalizável se, e somente se, a base B (em relação a qual $[T]_B$ é diagonal) é formada por autovetores de T.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (-2x + 4y, -x + 3y)$. Determine se T é diagonalizável.

Exemplo

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine uma base B de $\mathbb{R}^3$ em relação a qual a matriz de T é diagonal e escreva $[T]_B$.

Diagonalização de Operadores 2

Dizemos que a matriz A é diagonalizável quando $T \in \mathcal{L}(V)$, cuja representação em relação à base canônica de V é $[T] = A$, é diagonalizável. Assim, denotando por A a matriz de $T \in \mathcal{L}(V)$ em relação à base canônica C de V e por D a matriz de $T \in \mathcal{L}(V)$ em relação à base B formada por autovetores de T, segue que A e D são semelhantes.
E mais,

$$D = [T]_B = ([I]_C^B)^{-1} \cdot [T] \cdot [I]_C^B = ([I]_C^B)^{-1} \cdot A \cdot [I]_C^B$$

Denotando agora por P a matriz de mudança da base B para a base C obtém-se

$$D = P^{-1}AP$$

A discussão anterior justifica o resultado a seguir.

Teorema

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

Da igualdade $D = P^{-1}AP$, um vez que P é invertível, temos equivalentemente que $A = PDP^{-1}$. Diz-se então que P diagonaliza A ou, equivalentemente, que P é a matriz diagonalizadora.

Em resumo, para determinarmos a matriz $P \in M_n(\mathbb{K})$ que diagonaliza uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ devemos:

1. Encontrar n autovetores linearmente independentes de A.
2. Escrever a matriz P dispondo as componentes dos autovetores em suas colunas.

Exemplo

Determine, caso exista, uma matriz P que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Em caso afirmativo, calcule $P^{-1}AP$.


Bom Trabalho!