Álgebra Linear I
Produto interno

Prof. Joab dos Santos Silva [1]

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Sumário

Definição, Exemplos e Propriedades

Definição

Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Um **produto interno** sobre V é uma função

$$\begin{array}{rcccc} \langle\ ,\ \rangle & : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

ou seja, que associa a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$ um número $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, que satisfaz os seguintes axiomas:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall\ u, v \in V$ (Axi. de Comutatividade ou Simetria)
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, $\forall\ u, v, w \in V$ (Axi. de Aditividade)
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$, $\forall\ u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ (Axi. de Homogeneidade)
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\forall\ u \in V$, e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$. (Axioma de Positividade)

Um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno é chamado de **espaço euclidiano**.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, a função

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre** $\mathbb{R}^2$.

De fato, verifiquemos que a função satisfaz os axiomas de produto interno:

1) Para todo $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle \\ &= \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

2) Para todo $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2), w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle u + v, w \rangle &= \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 \\
&= (x_1 z_1 + x_2 z_2) + (y_1 z_1 + y_2 z_2) \\
&= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle
\end{aligned}
$$

3) Para todo $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u, v \rangle &= \langle \alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (\alpha x_1, \alpha x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 = \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2) \\
&= \alpha \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \alpha \langle u, v \rangle
\end{aligned}
$$

4) Para todo $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

Como ${x_j}^2 \geq 0$, para todo $1 \leq j \leq 2$, segue que $\langle u, u \rangle \geq 0$.
Suponha que $u \neq 0$, ou seja, que alguma de suas componentes é não nula, digamos $x_1 \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle = 0 \quad &\iff \quad {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0 \\ &\iff \quad \left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0 \\ &\iff \quad 1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0 \\ &\iff \quad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = -1 \end{aligned}$$

Contradição, pois o primeiro membro da última igualdade é maior que ou igual a zero enquanto o segundo membro é negativo. Portanto,

$$\langle u, u \rangle = 0 \quad \iff \quad u = 0$$

De forma análoga, a função

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

com $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, define um produto interno sobre $\mathbb{R}^3$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre** $\mathbb{R}^3$.

Generalizando, a função

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

com $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, define um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre** $\mathbb{R}^n$.

O produto interno canônico sobre $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como produto matricial da seguinte forma:

$$\langle u, v\rangle = v^t u = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

*Identificamos uma matriz de ordem 1 sobre $\mathbb{R}$ com o seu único elemento.

Exemplo

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$, chamados de pesos, e $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, a função

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i = \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n$$

define um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$. Este é chamado de **produto interno ponderado** com pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Exemplo

Sejam $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, verifique se a função

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 - 5x_2y_2$$

define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Sejam $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, mostre que a função

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

Apresentamos a seguir produtos internos definidos sobre espaços vetoriais diferentes de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_2(\mathbb{R})$. A função

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}$$

define um produto interno sobre $M_2(\mathbb{R})$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre** $M_2(\mathbb{R})$.

De forma geral, dados $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, a função

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + \cdots + a_{mn} b_{mn}$$

define um produto interno sobre $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre** $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo

Sejam $p, q \in P_n(\mathbb{R})$, onde $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, a função

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i = a_0 b_0 + \cdots + a_n b_n$$

define um produto interno sobre $P_n(\mathbb{R})$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre $P_n(\mathbb{R})$**.

Exemplo

Sejam $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$, a função

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

define um produto interno sobre $C([a, b], \mathbb{R})$. Este é chamado de **produto interno canônico sobre $C([a, b], \mathbb{R})$**.

Da definição de produto interno, decorrem as seguintes propriedades.

Proposição

Sejam V um espaço euclidiano, $u, v, w \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então,

1. $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$;
2. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$;
3. $\langle u, \beta v\rangle = \beta\langle u, v\rangle$.

Da definição de produto interno e da Proposição obtemos a bilinearidade:

$$\langle u + \alpha v, w + \beta z\rangle = \langle u, w\rangle + \beta\langle u, z\rangle + \alpha\langle v, w\rangle + \alpha\beta\langle v, z\rangle$$

A bilinearidade pode ser estendida a uma quantidade finita de parcelas, conforme resultado a seguir.

Proposição

Sejam V um espaço euclidiano, $u_i, v_j \in V$ e $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Então,

1. $$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle u_i, v\rangle;$$
2. $$\left\langle u, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle u, v_j\rangle;$$
3. $$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i, v_j\rangle.$$

Norma e Propriedades

Definição

Seja V um espaço euclidiano. Dado um vetor $v \in V$, chama-se **norma** de v, e denota-se por $\|v\|$, o número real definido por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

A norma está bem definida tendo em vista que $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\forall\ v \in V$. Dizemos que a norma definida como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ é proveniente do produto interno.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^n$ com produto interno canônico. A norma é dada por

$$\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2} \quad , \quad v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Esta é chamada **norma euclidiana**.

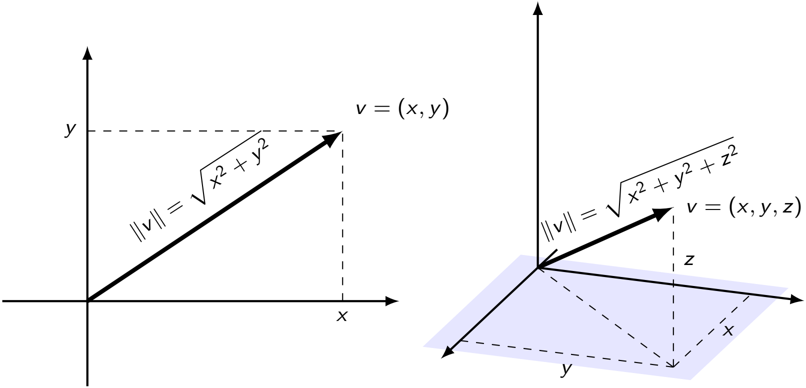


Figura: Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Exemplo

Seja $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ com produto interno canônico. A norma é dada por

$$\|A\| = \sqrt{a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + \cdots + a_{mn}{}^2} \quad , \quad A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Esta é chamada **norma de Frobenius**.

Exemplo

Seja $V = P_n(\mathbb{R})$ com produto interno canônico. A norma é dada por

$$\|p\| = \sqrt{a_0{}^2 + a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2}$$

onde $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n(\mathbb{R})$.

Exemplo

Seja $V = C([a,b],\mathbb{R})$ com o produto interno canônico. A norma é dada por

$$\|f\| = \left(\int_a^b [f(x)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f \in C([a,b],\mathbb{R})$$

Se V é um espaço com produto interno, $v \in V$ e $\|v\| = 1$, isto é $\langle v, v\rangle = 1$, então v é dito um **vetor unitário**. Dizemos também, neste caso, que v está normalizado. Todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, sendo suficiente para isto tomar o vetor $\dfrac{v}{\|v\|}$, chamado **versor** de v. De fato,

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \langle v, v\rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \|v\|^2 = 1$$

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule a norma do vetor $u = (4, -2, 2)$ em relação ao produto interno canônico;

b) Calcule a norma do vetor $u = (4, -2, 2)$ em relação ao produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

onde $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico. Calcule a norma de cada vetor e, caso o vetor não seja unitário, o normalize.

a) $v = (-1, 4, 2)$ b) $v = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ c) $v = (2, 1, -3)$

Exemplo

Dado o espaço euclidiano $P_2(\mathbb{R})$, considere o produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \quad , \quad \forall\ p, q \in P_2(\mathbb{R})$$

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\|p\| = 2\sqrt{\dfrac{2}{15}}$, sendo $p(x) = x^2 - ax$.

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2$$

onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Em relação a esse produto interno, determine um vetor v tal que

$$\|v\| = 4 \quad , \quad \langle u, v \rangle = 10 \quad \text{e} \quad u = (1, -2)$$

A norma proveniente do produto interno goza das seguintes propriedades.

Proposição

Seja V um espaço euclidiano. Para quaisquer $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $\|v\| \geq 0$, *e* $\|v\| = 0$ *se, e somente,* $v = 0$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

A propriedade é uma das mais importantes inequações da matemática.

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz)

Seja V um espaço euclidiano, então para todo $u, v \in V$ tem-se

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

A igualdade vale se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Exemplo

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, mostre que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Sejam $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), v = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right) \in \mathbb{R}^3$, da desigualdade CBS tem-se que

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right\rangle\right| &\leq \left\|(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})\right\| \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right\| \\
\left|\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right| &\leq (a+b+c)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \\
|3| &\leq (a+b+c)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \\
9 &\leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)
\end{aligned}$$

Corolário (Desigualdade Triangular)

Seja V um espaço euclidiano, então para todo $u, v \in V$ tem-se

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

A igualdade ocorre se, e somente se, um dos vetores é múltiplo não-negativo do outro.

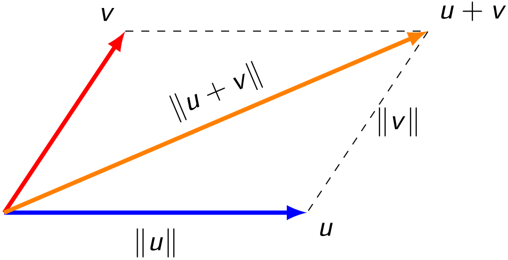


Figura: Desigualdade Triangular em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Definição

Seja V um espaço euclidiano. Dados $u, v \in V$, chama-se **distância entre u e v**, e denota-se por $d(u, v)$, o número real definido por

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno canônico. Calcule a distância entre os vetores $u = (3, 1)$ e $v = (-1, 2)$ do $\mathbb{R}^2$.

Ângulo entre Dois Vetores e Ortogonalidade

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$ não nulos. Da desigualdade de CBS, segue que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Como a função $f(\theta) = \cos\theta$ é bijetora do intervalo $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Definição

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$ não nulos. O **ângulo entre** u **e** v é o número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Exemplo

Dado o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico, sejam $u = (1, 2, -1), v = (3, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Determine o ângulo entre os vetores u e v.

Solução

Temos que

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 1 \\ \|u\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ \|v\| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Donde obtemos, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$. *Portanto,*

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{15}}\right) \approx 1,441\ rad$$

Exemplo

Seja $V = C([0,1],\mathbb{R})$ com produto interno canônico. Determine o ângulo entre as funções $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^2 - x$.

Definição

Seja V um espaço com produto interno.

1. Dizemos que $u, v \in V$ são **vetores ortogonais**, e denotamos por $u \perp v$, se $\langle u, v\rangle = 0$.
2. Dizemos que $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$ é um **conjunto ortogonal** se

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0, \quad \forall\ i \neq j.$$

3. Dizemos que $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$ é um **conjunto ortonormal** se

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{onde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, se } i \neq j \\ 1 & \text{, se } i = j \end{cases}.$$

Observemos que

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

mostrando a compatibilidade entre os conceitos de ângulo e ortogonalidade.

Definição

Seja V um espaço com produto interno.

1. Se o conjunto ortogonal $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V dizemos que B é uma **base ortogonal**.
2. Se o conjunto ortonormal $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V dizemos que B é uma **base ortonormal**.
3. Se V é um espaço euclidiano e o conjunto ortonormal $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, dizemos também que B é um **sistema cartesiano** para V.

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ e os vetores $u = (1, 1), v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

A) Verifique se os vetores u e v são ortogonais relativamente ao produto interno canônico.

B) Verifique se os vetores u e v são ortogonais relativamente ao produto interno definido por

$$\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 \quad \text{onde} \quad u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Solução

A) *Temos que* $\langle u, v\rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$. *Portanto,* $u \perp v$.

B) *Temos que* $\langle u, v\rangle = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. *Portanto,* $u \not\perp v$.

Exemplo

O conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (-1, -1, 2)$, é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2 \rangle &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \\
\langle v_1, v_3 \rangle &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0 \\
\langle v_2, v_3 \rangle &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\|v_1\| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\
\|v_2\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\
\|v_3\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}
\end{aligned}$$

donde segue que B não é ortonormal.

Exemplo (continuação)

Agora, podemos converter um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um conjunto ortonormal, bastando para tanto normalizar cada vetor não unitário de B.

Assim, segue que

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

é ortonormal.

Teorema (Teorema de Pitágoras)

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Então, $u \perp v$ se, e somente se,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposição

Seja V um espaço com produto interno. Todo conjunto ortogonal $S \subset V$ de vetores não nulos é linearmente independente.

Proposição

Sejam V um espaço com produto interno e $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$ um subconjunto ortogonal formado por vetores não nulos. Se $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_m]$, então

$$v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

Assim, pela Proposição, se v é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_m$, ortogonais e não nulos, então v se escreve como

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_m \rangle}{\|v_m\|^2} \cdot v_m$$

Definição

Sejam V um espaço com produto interno, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de V e $v \in V$.

1. O lado direito da expressão $v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$ é chamado **expansão de Fourier** de v em relação à base B.
2. Os escalares $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$, coordenadas do vetor v em relação à base B, são chamados de **coeficientes de Fourier** de v em relação à v_i.

Definição

A **projeção ortogonal de** u **sobre** v, ou **ao longo de** v, é o vetor definido por

$$proj_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

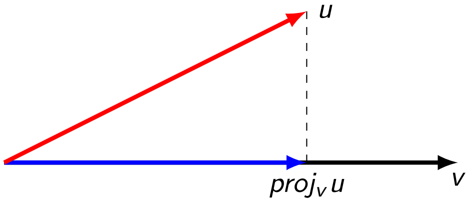


Figura: Projeção Ortogonal de u sobre v.

Exemplo

Considere $\mathbb{R}^2$ com produto interno canônico e $B = \{(1,1), (-1,1)\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Determine $[v]_B$ onde $v = (2,3)$.

Ilustramos graficamente na Figura 4 o exemplo anterior.

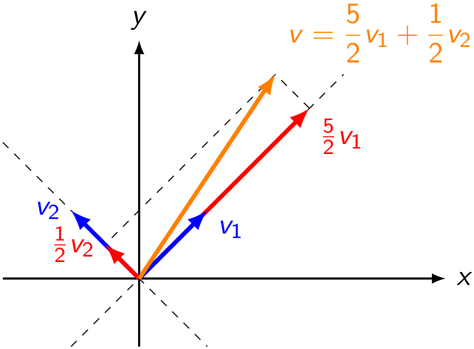


Figura: Coordenadas de $v = (2,3) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base $B = \{(1,1),(-1,1)\}$.

Exemplo

Dado o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico, determine a expansão de Fourier do vetor $v = (2,1,-3)$ em relação à base $B = \{(1,-1,2),(2,0,-1),(1,5,2)\}$.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ possui uma base ortonormal, a base canônica, o que certamente sugere os seguintes questionamentos: todo espaço vetorial de dimensão finita possui uma base ortogonal? Em caso afirmativo, como obtê-la?

Para responder aos questionamentos apresentamos o resultado a seguir, o qual trás em sua demostração o processo de construção da base ortogonal conhecido como Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Normalizando os vetores da base ortogonal obtemos a base ortonormal procurada.

Teorema

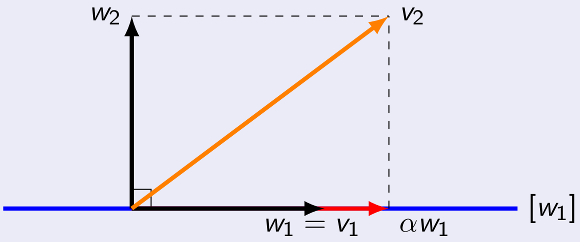
Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.

Demonstração.

Seja V um espaço com produto interno e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Objetivamos construir uma base $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ortogonal de V a partir de B. $\square$

Demonstração (Cont.)

Inicialmente, tomemos w_1 como qualquer um dos vetores de B, digamos $w_1 = v_1$. Determinemos um escalar α tal que $v_2 = w_2 + \alpha w_1$, e mais, que $w_1 \perp w_2$.



Da exigência $w_1 \perp w_2$, obtemos

$$\langle w_2, w_1 \rangle = 0 \iff \langle v_2 - \alpha w_1, w_1 \rangle = 0 \iff$$

$\square$

Demonstração (Cont.)

$$\langle v_2, w_1 \rangle - \alpha \langle w_1, w_1 \rangle = 0 \iff \alpha = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2}$$

Logo, $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2} \cdot w_1$. Como v_1 e v_2 são linearmente independentes, temos que $w_2 \neq 0$ e, claramente, $[w_1, w_2] = [v_1, v_2]$, pois w_1 e w_2 são combinações lineares de v_1 e v_2. Com isso, os vetores de $[w_1, w_2]$ são da forma

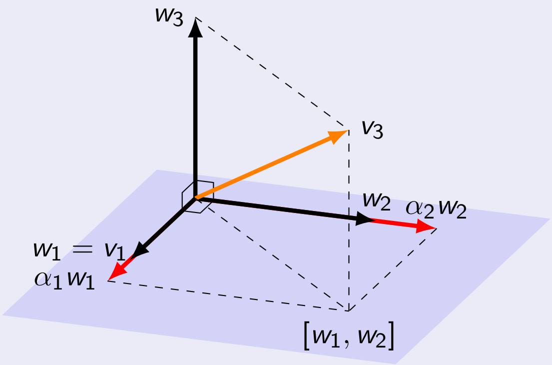
$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

para certos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

Determinemos agora α_1 e α_2 tais que $v_3 = w_3 + \alpha_2 w_2 + \alpha_1 w_1$, e mais, que $w_3 \perp w_1$ e $w_3 \perp w_2$.

$\square$

Demonstração (Cont.)



Da exigência $w_3 \perp w_1$, obtemos

$$\langle w_3, w_1 \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v_3 - \alpha_2 w_2 - \alpha_1 w_1, w_1 \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

Demonstração (Cont.)

$$\langle v_3, w_1\rangle - \alpha_2\langle w_2, w_1\rangle - \alpha_1\langle w_1, w_1\rangle = 0 \iff \alpha_1 = \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}$$

pois $w_2 \perp w_1$. De forma análoga, da exigência $w_3 \perp w_2$, obtemos

$$\alpha_2 = \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}$$

Logo, $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2$. Como v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes, temos que $w_3 \neq 0$ e, claramente, $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$, pois w_1, w_2 e w_3 são combinações lineares de v_1, v_2 e v_2. Com isso, os vetores de $[w_1, w_2, w_3]$ são da forma

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$$

para certos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$. $\square$

Demonstração (Cont.)

Continuado este processo, obtemos que

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$

é ortogonal a cada um dos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_k$. E, como $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ são linearmente independentes, temos que $w_{k+1} \neq 0$, donde segue que

$$[w_1, w_2, \ldots, w_{k+1}] = [v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}]$$

pois $w_1, w_2, \ldots, w_{k+1}$ são combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$. Agora, por Proposição, este conjunto é linearmente independente. Portanto, $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal. $\square$

Demonstração (Cont.)

Finalmente, tomando

$$w_i{}' = \frac{w_i}{\|w_i\|}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

obtemos uma base ortonormal $B'' = \{w_1{}', w_2{}', \ldots, w_n{}'\}$. $\square$

Algoritmo de Gram-Schmidt: *Seja V um espaço com produto interno e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, uma base arbitrária de V. A Sequência de Gram-Schmidt definida por*

$$\begin{cases} w_1 &= v_1 \\ w_k &= v_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \quad \textit{para } k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

é uma base ortogonal de V.

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno canônico. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ a partir da base

$$B = \{(3,1),(-2,2)\}$$

Exemplo

Dado o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico, determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de

$$B = \{(1,0,0),(0,-1,2),(2,-3,-1)\}$$

Complemento Ortogonal

Definição

Sejam V um espaço com produto interno e $S \subset V$ um subconjunto não vazio de V. O **complemento ortogonal** de S é definido por

$$S^{\perp} = \{v \in V |\ \langle v, u \rangle = 0, \forall\ u \in S\}$$

Dado $S \subset V$, temos que

$$\langle 0, u \rangle = 0 \quad , \quad \forall\ u \in S$$

Logo, $0 \in S^{\perp}$ e, portanto, $S^{\perp}$ é não vazio. Sejam $v_1, v_2 \in S^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, para todo $u \in S$ temos

$$\langle v_1 + \alpha v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \alpha \langle v_2, u \rangle = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

Consequentemente, $v_1 + \alpha v_2 \in S^{\perp}$.
Da discussão anterior segue que $S^{\perp}$ é um subespaço de V e, por isso, é também chamado de **subespaço ortogonal**.

Proposição

Sejam V um espaço euclidiano e $W = [w_1, \ldots, w_k]$ um subespaço de V. Então, $v \in W^{\perp}$ se, somente se, $\langle v, w_i \rangle = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq k$.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$, com produto interno canônico, e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x - y = 0\}$ um subespaço de V. Determine $W^{\perp}$.

Inicialmente, observemos que $W = \{(x, x)|\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$, donde obtemos que $B = \{(1, 1)\}$ é uma base de W. Agora, pela Proposição,

$$v = (x, y) \in W^{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle (x, y), (1, 1) \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 0$$

Portanto,

$$W^{\perp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y = 0\} = \{(-y, y)|\ y \in \mathbb{R}\} = [(-1, 1)]$$

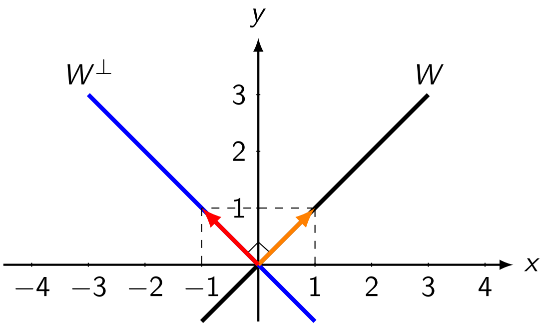


Figura: Complemento Ortogonal de $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x - y = 0\}$.

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Determine o complemento ortogonal do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = [(1, -1, 1), (2, 1, 3), (0, -3, -1)]$$

Teorema (Teorema da Decomposição Ortogonal)

Seja V um espaço com produto interno de dimensão finita $n \geq 1$ e W um subespaço de V, então

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Além disso, a norma do vetor $v \in V$ é dada pela ***fórmula de Pitágoras***

$$\|v\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2$$

onde $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

Em outras palavras, o Teorema diz que se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é uma base ortonormal de um subespaço W de um espaço com produto interno V de dimensão finita, então todo vetor $v \in V$ se decompõe, de maneira única, como a soma de duas parcelas, uma de W e uma de $W^{\perp}$, ortogonais entre si.

$$v = \underbrace{\langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_m \rangle v_m}_{\in\ W} + \underbrace{w_2}_{\in\ W^{\perp}}$$

Exemplo

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico e seja

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x + 2y - z = 0\right\}$$

um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Dado o vetor $v = (1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$, determine sua decomposição ortogonal $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

Para a solução do exemplo:

- Determine uma base B de W;
- Aplique o Processo de Ortoganalização de Gram-Schmidt à base B determinando uma base B';
- Normalize B' obtendo uma base ortonormal B''
- Aplique o Teorema da Decomposição Ortogonal.

Teremos a seguinte decomposição ortogonal:

$$(1,3,2) = \underbrace{\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6}\right)}_{\in\, W} + \underbrace{\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{6}\right)}_{\in\, W^{\perp}}$$

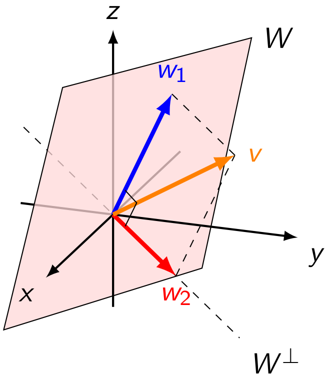


Figura: Decomposição Ortogonal do Vetor $v = (1,3,2)$.


Bom Trabalho!