Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Campus Campina Grande
Curso Superior de Licenciatura em Matemática
Componente Curricular: Álgebra Linear 1
Professor: Joab dos Santos Silva
Lista de Exercícios 3 ____/____/________

Aluno(a): ____

1 *Verifique, utilizando a definição, se os vetores dados são autovetores do operador linear* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *definido por* $T(x,y) = (2x - y, x + 4y)$*:*

a) $v = (-1,1)$; *b)* $v = (1,2)$; *c)* $v = (3,-4)$.

2 *Verifique,utilizando a definição, se os vetores dados são autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $v = (1,2,-1)$; *b)* $v = (2,-1,1)$; *c)* $v = (1,0,1)$.

3 *Sejam* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *e* $v_1 = (2,-1)$ *e* $v_2 = (1,1)$ *autovetores associados a* $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 5$*, respectivamente. Determine* $T(4,1)$.

4 *Determine os autovalores e autovetores dos seguintes operadores lineares:*

a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $T(x,y) = (5x - y, x + 3y)$;

b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $T(x,y,z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

5 *Determine os autovalores e autovetores do operador linear* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *cuja matriz em relação à base canônica é:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

6 *Determine os autovalores e autovetores do operador linear* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *cuja matriz em relação à base canônica é:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

7 *Determine os autovalores e autovetores de* A *e* A^{-1} *sendo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

8 *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique se T é diagonalizável.

9 *Determine se a matriz dada é diagonalizável:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10 *Determine, se possível, uma decomposição PDP^{-1} para a matriz dada:*

a) $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -3 & 9 & -7 \\ -3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$;

11 *Sejam $A, P \in M_n(\mathbb{K})$ com P invertível.*

a) Mostre que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) Calcule A^{10}, onde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

12 *Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica para cada autovalor dos operadores lineares apresentados nos Exercícios 5 e 6. Analise se os operadores são diagonalizáveis ou não.*

13 *Verifique que $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$ para cada autovalor λ_i de*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

e determine uma matriz P que diagonaliza a matriz A.

14 *Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

15 *Determine o polinômio minimal do operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$[T] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bom Trabalho!

Respostas

1

a) Sim. b) Não. c) Não.

2

a) Não. b) Sim. c) Sim.

3 $(8, 11)$.

4

a) $\lambda_1 = 4$ (raiz dupla), $v_1 = (1, 1)$.

b) $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (1, -3, 1)$.
$\lambda_2 = -1$, $v_2 = (-2, 4, 1)$.
$\lambda_3 = 2$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

5

a) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = (3, 1)$.
$\lambda_2 = 4$, $v_2 = (1, 1)$.
$\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$, $v_2 = (1, \sqrt{3})$.

b) Não possui autovalores e nem autovetores.

6

a) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (-4, 3, 2)$.
$\lambda_2 = 1$, $v_2 = (-4, 0, 1)$.
$\lambda_3 = 2$, $v_3 = (2, 1, 0)$.

b) $\lambda_1 = -4$, $v_1 = (-6, 8, 3)$.
$\lambda_2 = 3$ (raiz dupla), $v_2 = (5, -2, 1)$.

7 Para A:
$\lambda_1 = -5$, $v_1 = (-3, 4)$.
$\lambda_2 = 2$, $v_2 = (1, 1)$.

Para A^{-1}:
$\lambda_1 = -\dfrac{1}{5}$, $v_1 = (-3, 4)$.
$\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = (1, 1)$.

8 Sim.

9

a) Sim. b) Não.

10

a) $PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix}.$

b)

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

.

11

a) Empregue a indução matemática.

b) $\begin{bmatrix} -5114 & -3069 \\ 10230 & 6139 \end{bmatrix}.$

12 Diagonalizáveis: 5-a, 6-a, 6-b.

13 $ma(-1) = mg(-1) = 2$, $ma(2) = mg(2) = 1$ e $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

15 $m_T(x) = (x-1)(x-2).$